Лекция 5. Голоморфты функциялардың әртүрлі интерпретациясы

Жоспар:

1. Комплекс айнымалы функцияның туындысы
2. Коши-Риман шарты
3. Анықтамалар
4. Мысалдар

Анықтама. Егер $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ қатынасының Δz нөлге ұмтылғанда шегі ақырлы және бар болса, онда бұл шек $f(z)$ функциясының *туындысы* деп аталады және $f'(z)$ деп белгіленеді.

Демек,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z) \tag{7.1}$$

Ескерту. Туындының анықтамасындағы (7.1) – шек Δz – тің нөлге ұмтылу ережесіне тәуелді емес. Сондықтан нақты айнымалы дифференциалданатын функцияға қарағанда комплекс айнымалы дифференциалданатын функцияға қойылатын қосымша шарттар бар.

1-мысал. $f(z)=\overline{z}$ функциясы бүкіл комплекс жазықтықта үзіліссіз, бірақ ешқандай нүктеде дифференциалданбайды. Шынында $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta\overline{z}=\Delta x-i\Delta y$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Егер $\Delta y=0,\ \Delta z=\Delta x$ болса, онда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=1.$

Егер $\Delta x=0,\ \Delta z=i\Delta y$ болса, онда $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=-1.$

Олай болса, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ қатынасының шегі жоқ, демек, $f(z)=\overline{z}$ функциясы ешқандай нүктеде дифференциалданбайды.

Қасиеттері. Егер $f(z)$ және $g(z)$ функциялары дифференциалданатын болса, онда олардың қосындысы, көбейтіндісі және бөліндісі де дифференциалданады және мына теңдіктер орындалады:

1°. $(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z);$

2°. $(c\cdot f(z))'=c\cdot f'(z),\ \ (c=const);$

3°. $(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$

4°. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},\quad g(z)\neq 0.$

Егер $f(z)$ және $F(w)$ функциялары дифференциалданатын болса, онда $\Phi(z)=F(f(z))$ функциясы да дифференциалданады және

$$\Phi'(z)=F'(w)\cdot f'(z).$$

Теорема. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функциясы дифференциалдануы үшін $u(x,y)$ және $v(x,y)$ функцияларының дербес туындыларының бар болуы және Коши-Риман шарттарының орындалуы:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7.2}$$

қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі.* $f(z)$ функциясы дифференциалдансын делік

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Жоғарыдағы шек Δz – тің нөлге ұмтылу ережесіне тәуелді емес болғандықтан $\Delta z = \Delta x$ деп есептейік $(\Delta y = 0)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (7.3)$$

Егер $\Delta z = i\Delta y$ $(\Delta x = 0)$ болса, онда

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\,\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\,\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.4)$$

(7.3) және (7.4) теңдіктерін салыстырсақ, онда

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Соңғы теңдіктен Коши-Риман шарты шығады.

Жеткіліктілігі. $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функцияларының дербес туындылары бар және Коши-Риман шарты орындалсын делік. $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функциялары үшін

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\Delta z) \qquad (7.5)$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\Delta z) \qquad (7.6)$$

Соңғы теңдікті i – ге көбейтіп (7.5) – теңдікке қоссақ, онда

$$\Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\Delta z).$$

Егер Коши-Риман шартын ескерсек,

$$\Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\,\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

Демек, $\Delta f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + o(\Delta z).$

Соңғы теңдікті Δz – ке бөліп шекке көшсек

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема дәлелденді.

Коши-Риман шартын қолдансақ $f(z)$ функциясының туындысын бірнеше формула арқылы табуға болады:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (7.7)$$

Ескерту. Егер $z = re^{i\varphi}$ көрсеткіштік түрде берілсе, онда $f(z) = u(r,\varphi) + + iv(r,\varphi),\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ формулаларын ескеріп Коши-Риман шартын былай жазуға болады

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{7.8}$$

Туындыны мына формула арқылы табамыз:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) \tag{7.9}$$

(7.2) – Коши-Риман шартын басқаша жазып көрейік:

$$dz = dx + idy, \ d\bar{z} = dx - idy,$$

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

теңдіктерінен келесі формуланың шығатынын байқау қиын емес.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\bar{z}) +$$

$$+\frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

мұнда

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Енді $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ жеке қарастырайық

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Коши-Риман шартын ескерсек, онда

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{7.10}$$

екендігі шығады.

Сонымен Коши-Риман шартын (7.10) формуласы арқылы жазуға болады екен.

Анықтама. Егер $f(z)$ функциясы z нүктесінде және оның кейбір аймағында дифференциалданса, онда $f(z)$ функциясы z нүктесінде аналитикалық функция деп аталады. Егер $f(z)$ функциясы D облысының әрбір нүктесінде дифференциалданса, онда ол D облысында аналитикалық деп аталады.

Кез келген аналитикалық функция үшін (7.7) формуласы орындалады.

Жоғарыда қарастырылған $f(z) = \bar{z}$ функциясы аналитикалық емес.

Анықтама. Егер $\varphi(x, y)$ функциясының D облысында үзіліссіз екінші рет дербес туындалары бар және осы облыста Лаплас теңдеуін

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{7.11}$$

қанағаттандырса, онда бұл функция гармоникалық деп аталады.

Егер $f(z) = u + iv$ функциясы D облысында аналитикалық болса, онда оның $u(x, y)$ нақты бөлігі және $v(x, y)$ жорамал бөлігі осы облыста гармоникалық функция болады. Керісінше, егер $u_1(x, y)$ және $v_1(x, y)$ – кез келген екі гармоникалық функциялар болса, онда $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ функциясы жалпы жағдайда аналитикалық функция бола бермейді. $f_1(z)$ функциясы аналитикалық функция болу үшін $u_1(x, y)$ және $v_1(x, y)$ функциялары (7.2) Коши-Риман шартын қанағаттандыруы керек.

(7.2) шартты қанағаттандыратын екі гармоникалық функцияны түйіндес гармоникалық функциялар деп атайды.

2-мысал. Белгілі $u = 2\sin x\, ch\, y - x$ нақты бөлігі және $f(0) = 0$ мәні бойынша $z = 0$ нүктесінің аймағында аналитикалық $f(z)$ функциясын табыңыз.

Шешуі.Берілген $u = 2\sin x\, ch\, y - x$ функциясынан xбойынша туынды алайық. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x\, ch\, y - 1$ Коши-Риман шартының бірінші теңдігі бойынша

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x\, ch\, y - 1 = \frac{\partial v}{\partial y};$

y бойынша интегралдасақ, онда

$$v = 2\cos x\, sh\, y - y + \varphi(x)$$

мұнда $\varphi(x)$ – әзірге белгісізфункция.

v функциясын x бойынша дифференциалдап, Коши-Риман шартының екінші теңдігін ескерсек, онда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin x\, sh\, y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2\sin x\, sh\, y.$$

Демек, $\varphi'(x) = 0,\ \varphi(x) = c,\ c = const.$ Сонымен $v = 2\cos x\, sh\, y - y + c.$

Онда

$$f(z) = 2\sin x\, ch\, y - x + i(2\cos x\, sh\, y - y + c)$$

c – тұрақты санын $f(0) = 0$ шартынан табамыз: $f(0) = ic = 0,\ c = 0$

$$f(z) = 2\sin x\, ch\, y - x + 2i\cos x\, sh\, y - iy$$

Егер $ch\, z = \cos iz,\ i\, sh\, z = \sin iz$ формулаларын ескерсек, онда

$$f(z) = 2\sin x \cos iy + 2\cos x \sin iy - (x + iy) =$$
$$= 2\sin(x + iy) - (x + iy) = 2\sin z - z$$

Жауабы: $f(z) = 2\sin z - z$.

3-мысал. Белгілі $v = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$ жорамал бөлігі және $f(1) = 2i$ мәні бойынша $z = 1$ нүктесінің аймағында аналитикалық $f(z)$ функциясын табыңыз.

Шешуі. $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Коши-Риман шартының бірінші теңдігі бойынша

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Соңғы теңдікті x бойынша интегралдайық

$$u = -\int \frac{y \cdot 2xdx}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(y) = -y \cdot \int \frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y),$$

мұнда $\varphi(y)$ – әзірге белгісіз функция.

u функциясын y бойынша дифференциалдап, Коши-Риман шартының екінші теңдігін ескерсек, онда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -1 - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Демек, $\varphi'(y) = -1$, $\varphi(y) = -y + c$. Сонымен

$$u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y + c.$$

Онда

$$f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} - y + c + i\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{ix+y}{x^2+y^2} + ix - y + c = \frac{i(x-iy)}{x^2+y^2} + i(x+iy) + c$$

$$f(z) = \frac{i\cdot \bar{z}}{z\cdot \bar{z}} + iz + c = \frac{i}{z} + iz + c,$$

c – тұрақты санын $f(1) = 2i$ шартынан табамыз:

$$f(1) = i + i + c = 2i,\ \ c = 0.$$

Демек, жауабы: $f(z) = \dfrac{i}{z} + iz.$

Жоғарыдағы екі мысалда біз Коши-Риман шарты арқылы нақты немесе жорамал бөлігі белгілі болғанда аналитикалық $f(z)$ функциясын табуға болатынын көрсеттік.

Сонымен қатар, z_0 нүктесінің аймағында аналитикалық $f(z)$ функциясын келесі формулалардың біреуімен табуға болады([14] -қараңыз):

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{c}_0 \qquad (7.12)$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{c}_0 \qquad (7.13)$$

мұнда z_0 – ге түйіндес $\bar{z}_0$, c_0 – ге түйіндес $\bar{c}_0$, $f(z_0) = c_0$.

4-мысал. Белгілі $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$ жорамал бөлігі және $f(1) = i - 2$ мәні бойынша $z = 1$ нүктесінің аймағында аналитикалық $f(z)$ функциясын табыңыз.

Шешуі. (7.13) формуласын қолданайық, мұнда $z_0 = 1$, $c_0 = i - 2$ ($\bar{c}_0 = -2 - i$, $\bar{z}_0 = 1$). Демек,

$$f(z) = 2i\left(\ln\left(\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2i}\right)^2\right) + \frac{z+1}{2} - 2\frac{z-1}{2i}\right) + (-2-i) =$$

$$= 2i\ln\left(\frac{z^2+2z+1}{4}-\frac{z^2-2z+1}{4}\right)+iz+i-2z+2-2-i = 2i\ln z + iz - 2z.$$

Жауабы: $f(z) = 2i\ln z + iz - 2z.$

5-мысал. Белгілі $u = x\sin x\, ch\, y - y\cos x\, sh\, y$ нақты бөлігі және $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ мәні бойынша $z=\frac{\pi}{2}$ нүктесінің аймағында аналитикалық $f(z)$ функциясын табыңыз.

Шешуі. (7.12) формуласын қолданамыз, мұнда $z_0=\frac{\pi}{2},\ c_0=\frac{\pi}{2},$

$$f(z) = 2\left(\frac{z+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\left(\frac{z+\frac{\pi}{2}}{2}\right)ch\left(\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2i}\right)-\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2i}\cdot\cos\left(\frac{z+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot sh\left(\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2i}\right)\right)-\frac{\pi}{2} =$$

$$= \left(z+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)ch\left(\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i\right)-\left(z-\frac{\pi}{2}\right)i\cos\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot sh\left(\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i\right)-\frac{\pi}{2}$$

(4.16) – формулаларын ескерсек, онда

$$f(z) = z\left(\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\frac{\pi}{2} =$$

$$= z\cdot\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2} =$$

$$= z\sin z+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = z\sin z.$$

Сонымен, жауабы: $f(z) = z\sin z.$

6-мысал. $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ түріндегі барлық гармоникалық функцияларды табыңыз.

Шешуі. $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ функциясы гармоникалық болуы үшін (7.11) Лаплас теңдеуін қанағаттандыруы керек. Демек, $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ функциясының екінші ретті туындыларын табамыз. $\frac{y}{x}=t$ деп белгілесек, күрделі функциядан туынды алу ережесі бойынша

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\ \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t)\cdot\frac{y^2}{x^4}+f'(t)\cdot\frac{2y}{x^3},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Соңғы екі теңдікті қосамыз:

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^4}\right)f''(t)+\frac{2y}{x^3}f'(t)=0$$

$$(1+t^2)f''(t)+2t\,f'(t)=0$$

Соңғы дифференциалдық теңдеуді былай жазуға болады:

$$\left((1+t^2)f'(t)\right)'=0$$

Олай болса,

$$(1+t^2)f'(t)=c_1,$$

Демек,

$$f'(t)=\frac{c_1}{1+t^2},\ f(t)=c_1 arctg\, t+c_2.$$

Сонымен, есептің жауабы:

$$u=c_1 arctg\frac{y}{x}+c_2$$

түріндегі функциялар гармоникалық болады.

Туындының модулі мен аргументінің геометриялық мағынасы

1. z_0 нүктесінің аймағында дифференциалданатын $f(z)$ функциясының туындысының модулі $|f'(z_0)|$- дегеніміз, ол z_0 нүктесінде $w=f(z)$ бейнелеуі кезіндегі қисықтың сызықтық масштабының (созылу немесе сығылу) өзгеру коэффициенті.

2. z_0 нүктесіндегі туындының аргументі - осы нүктеде $w=f(z)$ бейнелеуі кезіндегі қисықтың бұрылу бұрышы.

3. $f'(z_0)\neq 0$ шартын қанағаттандыратын, z_0 нүктесінің аймағында дифференциалданатын $f(z)$ функциясының бейнелеуі z_0 нүктесінде конформды болады (конформды бейнелеуді §19 қараңыз). Бұл бейнелеуде созылудың тұрақтылық және бұрыштың сақталу қасиеті бар. Бұрыштың шамасы ғана емес, есептеу бағыты да сақталады.

7-мысал. $w=\dfrac{z-i}{z+1}$ бейнелеуі негізінде $z=2i$ нүктесіндегі созылу коэффициенті мен бұрылу бұрышын табыңыз.

Шешуі. $w'=\dfrac{z+1-z+i}{(z+1)^2}=\dfrac{1+i}{(z+1)^2}$ туындысын табайық. Туындының $z=2i$ нүктесіндегі мәнін есептейік

$$w'(2i)=\frac{3i}{(1+2i)^2}=\frac{3i}{1+4i-4}=\frac{3i(-3-4i)}{(-3-4i)(-3-4i)}=$$

$$=\frac{-9i+12}{9+16}=\frac{12-9i}{25}=\frac{3}{25}(4-3i).$$

Созылу коэффициенті туындының модуліне тең:

$$k=|w'(2i)|=\frac{3}{25}\sqrt{16+9}=\frac{3}{5}.$$

Бұрылу бұрышы – туындының аргументіне тең: $\arg w'(2i)=-arctg\dfrac{3}{4}.$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.